流体Euler方程式, Yang-Mills方程式の渦表示とClebsch variableおよびHelicityについて (オイラー方程式の数理 : 力学と変分原理250年)

郡, 敏昭

数理解析研究所講究録
第 1749 巻 2011 年 46-60

流体 Euler 方程式, Yang-Mills 方程式の渦表示と Clebsch variable および Helicity について

早稲田大学理工学部　郡　敏昭　(Tosiaki Kori)
School of Sciences and Technology,
Waseda Uiversity

(i) Yang-Mills 方程式の 3 次元表現が、接続全体の空間 $\mathcal{A}$ の余接空間の接空間 $T(T^*\mathcal{A})$ という Poisson 多様体上の Hamilton 運動方程式であること、(ii) Clebsch parametrization の構成、(iii) 無限小ゲージ変換群の双対空間が YM-磁荷と YM-電荷を表していること、(iv) 流体 Euler 方程式に対する同様の考察,(v) 流体 Euler 方程式, YM-方程式の helicity, を議論をした。　この講演は 2004 年の「力学系と微分幾何」研究集会での講演「Yang-Mills 方程式のハミルトン形式」(数理解析研究所講究録 1408 号 (2004), 110-122) の続きで、そこでの解けなかった問題が解けた報告である。

1 Yang-Mills 方程式

1.1 Maxwell の方程式: $U(1)-$YM 方程式

R^4 上の 1 次微分形式 $\hat{A}=A_1dx^1+A_2dx^2+A_3dx^3+\phi\, dt$ を外微分して

$$\begin{aligned} F &= d^4\hat{A} = B+Edt \\ &= B_1dx^2\wedge dx^3+B_2dx^3\wedge dx^1+B_3dx^1\wedge dx^2 \\ &\quad + (E_1dx^1+E_2dx^2+E_3dx^3)\wedge dt, \qquad \text{と分解する}. \end{aligned}$$

$$\text{ここに}\quad B_i=\frac{\partial}{\partial x^j}A_k-\frac{\partial}{\partial x^k}A_j, \qquad E_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\phi-\frac{\partial}{\partial t}A_i\,.$$

$d^4F=d^4d^4A=0$ より

$$\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x^1}B_i=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x^j}E_k-\frac{\partial}{\partial x^k}E_j+\dot{B}_i=0\,.$$

この式を R^3 の外微分 $d=\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x^i}dx^i$ で書くと

$$dB=0, \qquad dE+\dot{B}=0, \tag{1}$$

ベクトル解析では

$$div\, B=0, \qquad \nabla\times E+\dot{B}=0. \tag{2}$$

次に、与えられた2次形式　$\mathbf{j} = j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2$ と3次形式　$\rho dx^1 dx^2 dx^3$ に対して、
方程式　　$d^4 \star F = \mathbf{j} \wedge dt + \rho$　を $\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^1$ に分解すると、$\star$ は4次元 Hodge 作用素、$*$ は3 次元 Hodge 作用素として、

$$d * E = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \qquad d * B + *\dot{E} = \mathbf{j}\,, \tag{3}$$

すなわち

$$d^* E = \rho, \qquad d^* B + \dot{E} = *\mathbf{j} \tag{4}$$

ベクトル解析では

$$div\, E = \rho, \qquad \nabla \times B + \dot{E} = \mathbf{j}\,. \tag{5}$$

(1)(2) が、磁気単極子の非存在と、ファラディの電磁誘導の法則で、(3)(4) が、電荷が ρ のときのガウスの法則と、カレントが $\mathbf{j}$ のアンペールの法則を示している。

1.2　4次元 Yang-Mills 方程式 の 3 次元表現

$M = \mathrm{R}^4$ 上の 接続 (vector potential) を

$$\hat{A} = A + \phi dt = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + \phi dt\,, \qquad A_k,\, \phi \in su(n)\,.$$

$\hat{A}$ が、Yang-Mills 方程式

$$d^\star_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0, \qquad d_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0, \tag{6}$$

の解であるとき Yang-Mills 接続という.
$d_{\hat{A}}$, $d^\star_{\hat{A}}$　は4次元 covariant derivative とその Hodge dual,
d_A , d^*_A　は3次元 covariant derivative とその Hodge dual を表すことにする.

$$\begin{aligned} F_{\hat{A}} &= B + E dt, \\ B &\equiv F_A = \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k, \qquad B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} + [A_j\, A_k], \\ E &= d_A \phi - \dot{A} = E_i dx^i, \qquad E_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + [A_i,\, \phi] - \frac{\partial A_i}{\partial t}, \qquad \text{と書くと} \end{aligned}$$

方程式　$d^\star_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0$　は

$$d^*_A B + [\phi,\, E] + \dot{E} = 0, \qquad d^*_A E = 0. \tag{7}$$

方程式　$d_{\hat{A}} F_{\hat{A}} = 0$　[Bianchi Identity] の方は

$$d_A E + [\phi,\, B] - \dot{B} = 0, \qquad d_A B = 0. \tag{8}$$

(7), (8) が4次元 Yang-Mills 方程式の3次元表現である.

1.3 ゲージ変換

$\hat{A} = A + \phi\, dt$ に 4 次元のゲージ変換群 $\hat{\mathcal{G}} = C^\infty(\mathrm{R}^4, su(n))$ は

$$\hat{g} \cdot \hat{A} = \hat{g}^{-1}\, \hat{A}\, \hat{g} \,+\, \hat{g}^{-1}\, d\hat{g}$$

で右作用する。
　$\hat{g} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して

$$F_{\hat{g}\cdot\hat{A}} \;=\; \hat{g}^{-1}\, F_{\hat{A}}\, \hat{g}\,, \qquad d_{\hat{g}\cdot\hat{A}}\,(\hat{g}^{-1}\,\varphi\,\hat{g}) \;=\; \hat{g}^{-1}\, d_{\hat{A}}\varphi\, \hat{g}\,,$$

が成り立ち、Hodge 作用素 $\star$ はゲージ変換の作用と可換だから、Yang-Mills 方程式 (7),　(8) はゲージ変換で不変である.

$$\hat{g} \cdot \hat{A} = g^{-1}Ag + g^{-1}dg + g^{-1}(\phi + \dot{g}g^{-1})g\, dt$$

より、パラメータ t の 3 次元のゲージ変換 $g = g(t)$ と見た作用は、

$$g \cdot (A, \phi) == \big(g \cdot A,\, Ad_{g^{-1}}(\phi + \dot{g}g^{-1})\big)\,.$$

2　3 次元へ誘導した Yang-Mills 方程式

2.1　Yang-Mills 方程式の 3 次元表現

ヒグス場 がない場合 $\phi = 0$ には $E = -\dot{A}$ で、3 次元 Yang-Mills 方程式 (7), (8) は

$$d_A^* B + \dot{E} = 0, \qquad d_A^* E \;=\; 0, \tag{9}$$

$$d_A E - \dot{B} = 0, \qquad d_A B \;=\; 0. \tag{10}$$

この方程式をハミルトン運動方程式として書きたい；
次のことを示す.

1. 方程式 $d_A^* B + \dot{E} = 0$ と $d_A E - \dot{B} = 0$ は、接続（vector potential）の空間 の接空間や余接空間の上の, Poisson 構造のハミルトン運動方程式として現れる.
2. 方程式 $d_A^* E = 0$ と方程式 $d_A B = 0$ は接続（vector potential）の空間へのゲージ群の作用による rduction （moment map の値が 0）として現れる．したがって　moment map の値域である 無限小ゲージ変換 $Lie\,\mathcal{G}$ の双対空間 $(Lie\,\mathcal{G})^*$ は YM-電荷や YM-磁荷を表している.

2.2　YM 方程式の ハミルトン形式

$M = M^3$ を 3 次元 compact リーマン多様体, $G = SU(n)$, $n \geq 2$, を特殊ユニタリ群とする．そのリー環 $su(n)$ は trace が 0 の $n \times n$ 複素行列.
$P \longrightarrow M$ を M 上の G 主束,
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_3$ をその接続全体とする。

$\mathcal{A}$ は $\Omega^1(M, ad\,P) = \Omega^1(M, su(n))$ を線形モデルとするアフィン空間である。
$A \in \mathcal{A}$ での接空間は $T_A\mathcal{A} = \Omega^1(M,\ su(n))$.
$a,\ b \in T_A\mathcal{A} \simeq \Omega^1(M, su(n))$ の内積を

$$(a,\ b)_1 = \int_M Tr\, a \wedge *b$$

とする. 微分形式への作用 $\wedge$, $*$ と行列のかけ算とを行っている.
$R = T\mathcal{A}$ 上の symplectic 形式 σ を、$R = T\mathcal{A} \ni (A,\ p),\ p \in T_A\mathcal{A}$, で

$$\sigma_{(A,p)}(\,(a,x)\,,\,(b,y)\,) = (b,x)_1 \,-\, (a,y)_1\,, \tag{11}$$

$\forall\,(a,x)\,,\,(b,y) \in T_{(A,p)}R = T_A\mathcal{A} \oplus T_A\mathcal{A}$, と置いて定義する。
R 上の関数 Φ の ((a,x) 方向) 微分は、

$$\delta\Phi_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}(\Phi(A+ta, p+tx) - \Phi(A,p))$$

だから 偏微分 $\frac{\delta\Phi}{\delta A}$, $\frac{\delta\Phi}{\delta p} \in T_A\mathcal{A} \simeq \Omega^1(M, adP)$ は

$$\delta\Phi_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta A}, a\right)_1, \qquad \delta\Phi_{(A,p)}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta p}, x\right)_1.$$

ハミルトニアンとして

$$H(A,p) = \frac{1}{2}(B,B)_2 + \frac{1}{2}(p,p)_1, \qquad B = F_A, \qquad \text{を取る.} \tag{12}$$

$(\frac{\delta B}{\delta A})a = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}(F_{A+ta} - F_A) = d_A a$, $(\frac{\delta p}{\delta p})x = x$ を使って,

$$\delta H_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = (d_A a, F_A)_2 + (p,x)_1 = (a, d_A^* F_A)_1 + (p,x)_1 \tag{13}$$

ゆえ

$$\frac{\delta H}{\delta A} = d_A^* B, \qquad \frac{\delta H}{\delta p} = p\,.$$

(13) , (11) より

$$\delta H_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \sigma_{(A,p)}(\,(a,x)\,,\ (p, -d_A^* F_A)\,). \tag{14}$$

だから、ハミルトンベクトル場 X_H は

$$(X_H)_{(A,p)} = \begin{pmatrix} p \\ -d_A^* B \end{pmatrix} = p\frac{\partial}{\partial A} - d_A^* B \frac{\partial}{\partial p}. \tag{15}$$

ハミルトンの運動方程式は

$$\dot{A} = p \qquad \dot{p} = d_A^* B \tag{16}$$

これが $\phi = 0$ のときの YM 方程式 (9) で $p = -E$ と対応している.

2.3 ゲージ変換群の作用

シンプレクティク多様体 (R,ω) には M 上のゲージ変換群
$\mathcal{G} = Aut_0(P) = \Omega^0(M, AdP)$ が

$$g \cdot (A,p) = (A + g^{-1}d_A g,\ g^{-1}pg), \qquad g \in \mathcal{G} \tag{17}$$

により（右）作用する。この作用でハミルトニアン H は不変である。この作用によるモーメント写像を求めよう。

$Lie\mathcal{G} = \Omega^0(M, adP)$ である。$\xi \in Lie\mathcal{G}$ に対応する基本ベクトル場 ξ_R は

$$\xi_R(A,p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (\exp t\xi \cdot A,\ \exp t\xi \cdot E) = (d_A\xi,\ -[\xi,\ p]\,) \in T_{(A,p)}R.$$

R 上の関数 J^ξ を $(dJ^\xi)_{(A,p)} = \sigma_{(A,p)}(\,\cdot,\ \xi_R)$ となるように求めたい。それは

$$J^\xi((A,p)) = (d_A^* p, \xi)_0 \tag{18}$$

で与えられる。ここに $(\xi,\eta)_0 = \int_M Tr\,\xi * \eta$。実際 (18) の微分を計算すれば、

$$\begin{aligned}(dJ^\xi)_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left((d_{A+ta}^* p, \xi)_0 - (d_A^* p, \xi)_0\right) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}(p\,,\ d_{A+ta}\xi - d_A\xi)_1 \\ &= (p, [a, \xi])_1 = (a, [\xi, p])_1.\end{aligned}$$

$$(dJ^\xi)_{(A,E)}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left((d_A^*(p+tx), \xi)_0 - (d_A^* p, \xi)_0\right) = \ = (d_A^* x, \xi)_0 = (x, d_A\xi)_1.$$

より

$$(dJ^\xi)_{(A,p)}\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = (d_A\xi, x)_1 - (a, -[\xi,\ p])_1 = \sigma_{(A,p)}(\,(a,x),\ (d_A\xi, -[\xi,\ p])\,).$$

ゆえに

$$\frac{\delta J^\xi}{\delta A} = d_A\xi, \qquad \frac{\delta J^\xi}{\delta p} = -[\xi,\ p]$$

となり (18) が求める関数 J^ξ であることがわかった。

モーメント写像 $\mathbf{J} : R \longrightarrow (Lie\mathcal{G})^* \simeq Lie\,\mathcal{G}$ は

$$\mathbf{J}((A,p)) = \left\{\xi \longrightarrow J^\xi(A,p) = (d_A^*\, p,\ \xi\,)_0\right\}$$

すなわち

$$\mathbf{J}(A,p) = d_A^*\, p \tag{19}$$

で与えられる。$(p = -E$ と記号を変えて)、

$$R_0 = \{(A,E) \in R; \quad A \in \mathcal{A};\ \mathbf{J}(A,E) = 0\} = \{(A,E) \in R; \quad A \in \mathcal{A};\ d_A^* E = 0\}$$

は $R = T\mathcal{A}$ の submanifold になる。さらに (R_0,σ) は $\mathcal{G}$ invariant coisotropic submanifold になり、$\mathcal{G}$ は (R_0,σ) に locally free に作用し、$\mathcal{G}$-orbit が null-foliation の leaves となっている。$(R_0/\mathcal{G},\ \sigma)$ は reduced symplectic manifold となる（Marsden-Weinstein の reduction theorem)。

YM-方程式 (9) の後半 $d_A^* E = 0$ は、A がモーメント写像の値を 0 とする接続であることを言っている。
すなわち、$(Lie\mathcal{G})^*$ は current (charge) の空間 $\{\mathbf{j}, \rho\}$ にほかならないことがわかる。

• 2.2 , 2.3 で示したことをまとめると、
symplectic 多様体 $(T\mathcal{A}, \sigma)$ 上で、 $H(A,p) = \frac{1}{2}(B,B)_2 + \frac{1}{2}(E,E)_1$ を Hamiltonian とする運動方程式は、YM 方程式 $d_A^* B - \dot{E} = 0$ であり， 方程式 $d_A^* E = 0$ は $A \in \mathcal{A}$ が無限小ゲージ変換群の作用のモーメント写像のゼロ点であることを示している. A, $B = F_A$ が解で、そのゲージ変換 $g \cdot A$ も解となる. 運動は constant charge の部分多様体＝ゲージ変換群 $\mathcal{G}$ による reduced symplectic 多様体 $(T\mathcal{A}/\mathcal{G}, \sigma)$ の上に制限される.

3 Vorticity 表示、Clebsh parametrization.

運動が実現されている空間では、対称な対象を区別できない. ゲージ変換で不変な対象のみが観測される. ゲージ変換で 不変な、磁場や電場の満たす方程式として Maxwell 方程式 (2), (4) がある. ベクトルポテンシャル $A \in \mathcal{A}$ は観測されないので A と $p = -E$ で運動方程式を書くよりも、YM-電場 E と YM-磁場 B が表す所与の空間において運動方程式を記述するほうが、その趣きがよりわかった気分になるだろう。 それが vorticity 表示である. YM-電場 E と YM-磁場 B の空間はリー群 $\mathcal{G}$ の作用のモーメント写像の値域である.

3.1 YM 方程式の vorticity 表示

$\mathcal{A}$ の余接空間 $T^*\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}$ を考える.
$T^*\mathcal{A}$ の点は $(A,B) \in T^*\mathcal{A}$, ここに $A \in \mathcal{A}$, $B \in T_A\mathcal{A}$, と書ける.
$(A,B) \in T^*\mathcal{A}$ での接空間は

$$T_{(A,B)}(T^*\mathcal{A}) = T_A\mathcal{A} \oplus T_A^*\mathcal{A} \simeq \Omega^1(M, adP) \times \Omega^2(M, adP) \tag{20}$$

$\mathcal{P} = T(T^*\mathcal{A})$ に Poisson 多様体の構造を定義しよう.
まず $\mathcal{P}$ の点は $(A,B,E) \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$, $E \in T_A\mathcal{A}$, $B \in T^*\mathcal{A}$, で表す.
$\Phi = \Phi(A,E,B) \in C^\infty(\mathcal{P})$ に対して,

$$\frac{\delta\Phi}{\delta E} \in \Omega^1(M, adP) \simeq T_A\mathcal{A}, \tag{21}$$

を次の式で定義する：$\forall a \in T_A\mathcal{A} \simeq \Omega^1(M, adP)$ に対して

$$(d\Phi)_{(A,E,B)} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\Phi(A, E+\epsilon a, B) - \Phi(A,E,B)}{\epsilon} = \left(a, \frac{\delta\Phi}{\delta E}\right)_1 \tag{22}$$

同様に

$$\frac{\delta\Phi}{\delta B} \in \Omega^2(M, adP) \simeq T_A^*\mathcal{A}, \tag{23}$$

を次の式で定義する：$\forall\beta \in T^*_A\mathcal{A} \simeq \Omega^2(M, adP)$ に対して

$$(d\Phi)_{(A,E,B)}\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix} = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\Phi(A,E,B+\epsilon\beta)-\Phi(A,E,B)}{\epsilon} = \left(\beta, \frac{\delta\Phi}{\delta B}\right)_2 . \tag{24}$$

Poisson bracket は

$$\{\Phi,\Psi\}_{vor} = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta E}, d^*_A(\frac{\delta\Psi}{\delta B})\right)_1 - \left(\frac{\delta\Psi}{\delta E}, d^*_A(\frac{\delta\Phi}{\delta B})\right)_1 \tag{25}$$

ハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}((E,E)_1 + (B, B)_2)$$

で定義すると、

$$\frac{\delta H}{\delta E} = E, \qquad \frac{\delta H}{\delta B} = B \tag{26}$$

より、この Poissson 多様体でのハミルトンの運動方程式 $\dot{\Phi} = \{H,\Phi\}$ は、

$$\dot{\Phi} = (d\Phi)_{(A,E,B)}\begin{pmatrix}\dot{E}\\ \dot{B}\end{pmatrix} = \left(\dot{E}, \frac{\delta\Phi}{\delta E}\right)_1 + \left(\dot{B}, \frac{\delta\Phi}{\delta B}\right)_2,$$

であり、一方

$$\{H,\Phi\} = \left(E, d^*_A(\frac{\delta\Phi}{\delta B})\right)_1 - \left(\frac{\delta\Phi}{\delta E}, d^*_A B\right)_1 = \left(d_A E, \frac{\delta\Phi}{\delta B}\right)_2 - \left(\frac{\delta\Phi}{\delta E}, d^*_A B\right)_1$$

だから、

$$\dot{E} = -d^*_A B, \qquad \dot{B} = d_A E, \tag{27}$$

となることがわかる。これは YM 方程式 (9), (10) である。

3.2 Clebsch parametrization

対応

$$\psi : T\mathcal{A} \ni (A, p) \longrightarrow (E = -p,\, B = F_A) \in \mathcal{P} = T(T^*\mathcal{A}) \tag{28}$$

は、$\forall\Phi, \Psi \in C^\infty(\mathcal{P})$ に対して、

$$\{\Psi\circ\psi, \Phi\circ\psi\}_{vor} = \{\Psi,\Phi\}_R\circ\psi \tag{29}$$

を満たす。 すなわち、symplectic 多様体 (R,ω) から Poisson 多様体 $(P,\{\,,\,\}_{vor})$ への Poisson map を与えている.
方程式で書けば

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot{A} &=& -E\\ \dot{E} &=& -d^*_A B\end{array}\right\} \stackrel{clebsch}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl}\dot{E} &=& -d^*_A B,\\ \dot{B} &=& d_A E\end{array}\right. \tag{30}$$

3.3 ゲージ変換群の作用

Poisson 多様体 $\mathcal{P}$ へのゲージ変換群 $\mathcal{G} = \Omega^0(M, AdP)$ の infinitsimal 作用を見よう.

有限次元多様体上の基本 1 次形式の類似となる $T^*\mathcal{A}$ 上の 1 次形式 θ を, その $(A, B) \in T^*\mathcal{A}$ での値を

$$T_{(A,B)}(T^*\mathcal{A}) = T_A\mathcal{A} \oplus T_A^*\mathcal{A} \ni \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \theta_{(A,B)} \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} = \int_M Tr\, B \wedge a. \quad (31)$$

と定めて定義する. これは β に依存しないので 今後

$$\theta_{(A,B)}a, \qquad a \in T_A\mathcal{A}$$

と書くことにする.

$\xi \in Lie\mathcal{G}$ の $\mathcal{A}$ への infiniteimal 作用は

$$Lie\mathcal{G} \times \mathcal{A} \ni (\xi, A) \longrightarrow \xi \cdot A = d_A\xi \in T_A\mathcal{A}$$

で与えられた. $\mathcal{A}$ 上のベクトル場 $A \longrightarrow d_A\xi$ の $T^*\mathcal{A}$ への持ち上げ (cotangent lift) は、

$$T^*\mathcal{A} \ni (A, B) \longrightarrow \theta_{(A,B)}\, d_A\xi = \int_M Tr\, B \wedge d_A\xi \quad (32)$$

を Hamiltonian とする $T^*\mathcal{A}$ 上の Hamiltonian vector field である. この Hamiltonian vector field はまた

$$\Phi \longrightarrow X(\Phi) = \left\{ \Phi\, , \theta_{(A,B)}\, d_A\xi \right\}$$

で与えられる $\mathcal{P}$ 上のベクトル場 X である. ゆえに、 $\xi \in Lie\mathcal{G}$ の $\mathcal{P}$ への infiniteimal 作用の momrnt map $\mathbf{J}$ が

$$\mathbf{J}: \quad \mathcal{P} \ni (A, E, B) \longrightarrow \left(\xi \rightsquigarrow \theta_{(A,B)} d_A\xi\right) \in (Lie\mathcal{G})^*. \quad (33)$$

となることがわかった.

$$\theta_{(A,B)} d_A\xi = \int_M Tr B \wedge d_A\xi = -\int_M Tr d_A B\, \xi$$

より

$$\mathbf{J} = -d_A B. \quad (34)$$

• YM 方程式 (10) の後半 $d_A B = 0$ は $(A, E, B) \in \mathcal{P}$ で moment map $\mathbf{J}$ の値が 0 であると言っている. moment map の値の空間=無限小ゲージ変換 $(Lie\,\mathcal{G})^*$ は単極磁荷の値の空間である. 以上の 3.2, 3.3 節をよく見ると次のことがわかる。**ハミルトン力学系のゲージ変換群は、それが作用する Poisson 多様体や運動方程式 (vortex 表示) においては対称性により隠れているが、Clebch parametrization により陽的に姿を現す.**

4 incompressible flow の Euler 方程式

incompressible flow の Euler 方程式を、(1) volume preserving diffeomorphism の空間の接空間 (divergence free かつ境界に接するベクトル場全体) の上のハミルトン運動方程式として記述する、(2) 渦ベクトル場全体の空間上のハミルトン運動方程式として記述する、(3) (1), (2) の微分形式による記述をすることにより、Maxwell 方程式との類似、したがって 1 節の Y-M 方程式との類似および、Clebsch parameter 表示、Helicity の双方における同じ表現を見る. (A-H. 1 章、3 章および M-W をつないで紹介する)

4.1 $\mathcal{G} = SVect(B)$ 上のハミルトン運動方程式としての Euler 方程式とその vortex 表現

4.1.1 $\mathcal{G} = SVect(B)$

$B \subset \mathrm{R}^3$ を B に移す体積を変えない微分同相写像の全体 $SDiff(B)$ は群になる。このリー群のリー環は

$$SVect(B) = \{\mathbf{v} \in Vect(B);\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v} \,//\, \partial B\}$$

である. ここで $//\partial B$ はベクトル $\mathbf{v}$ が境界 ∂B に接していることを云う.

$\mathcal{G} = SVect(B) \ni \mathbf{v}, \mathbf{u}$ の bracket を $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ で与えると (無限次元) リー環を得る。 汎関数微分 $\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \in \mathcal{G}$ を

$$DF(\mathbf{v})\delta\mathbf{v} = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{F(\mathbf{v}+\epsilon\delta\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})}{\epsilon} = \int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\delta\mathbf{v}dx^3$$

で定義して、$F, G \in C^\infty(\mathcal{G})$, $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$, に対して、

$$\{F, G\}(\mathbf{v}) = -\int_B \mathbf{v}\cdot\left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\right] dx^3. \tag{35}$$

とおくと、$(\mathcal{G}, \{\cdot,\cdot\})$ は Poisson 多様体となる・ ハミルトニアン

$$H(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_B \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dx^3$$

に対する、Hamilton 運動方程式 $\frac{d}{dt}F(\mathbf{v}(t)) = \{H, F\}(\mathbf{v})$ は

$$\int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\cdot\dot{\mathbf{v}}\,dx^3 = -\int_B \mathbf{v}\cdot\left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \mathbf{v}\right] dx^3.$$

$SVect(B) \ni \mathbf{v}$ の満たす条件を使い、ベクトル解析を行うと方程式

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0, \qquad \exists p, \tag{36}$$

が得られる。これが非圧縮性流体のオイラー方程式である.

4.1.2 $\mathcal{G}^* \simeq \nabla \times \mathcal{G}$: vorticity vector fields

- 一般にリー環 $\mathcal{G}$ の双対空間 $\mathcal{G}^*$ は

$$\{F, G\}(\nu) = -\left(\nu, \left[\frac{\delta F}{\delta \nu}, \frac{\delta G}{\delta \nu}\right]\right), \qquad \forall \nu \in \mathcal{G}^* \tag{37}$$

により Poisson 多様体となる．ここに $\frac{\delta F}{\delta \nu} \in \mathcal{G}$ は

$$DF(\nu)\delta\nu = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{F(\nu + \epsilon\delta\nu) - F(\nu)}{\epsilon} = \left(\delta\nu\,, \frac{\delta F}{\delta \nu}\right)$$

により定義される．
またリー群の作用する Poisson 多様体 P 上の Moment 写像 $J : P \longrightarrow \mathcal{G}^*$ は Poisson map(= Clebsch parametrization) である．

これを以下に述べる $\mathcal{G} = SVect(B)$ の双対の 3 つの表現
$\mathcal{G}^* \simeq \nabla \times \mathcal{G}$ と $\mathcal{G}^* \simeq \Omega^1(B)/d\Omega^0(B)$ と $\mathcal{G}^* \simeq Z^2(B, \partial B)$
に適用して 各々のハミルトン運動方程式の表し方を見よう．

- vorticity vector fields の空間

$$\nabla \times \mathcal{G} = \{\omega = \nabla \times \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \in \mathcal{G}\}.$$

を考える． 任意の $\mathbf{u} \in \mathcal{G}$ に対して $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{u}$ は (mod. ∇f) で一意的な解 $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ を持つ．実際 Biot-Savart's の公式:

$$\mathbf{v}(y) = BS(\mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi} \int_B \frac{\mathbf{u}(x) \times (x - y)}{|x - y|^3} d^3x,$$

で解は与えられる: $\nabla \times \mathcal{G} \overset{BS \simeq}{\longrightarrow} \mathcal{G}$.
$\nabla \times \mathcal{G}$ は双一次形式

$$(\omega, \mathbf{v}) = \int_B \omega \cdot \mathbf{v}\; d^3x$$

により $\mathcal{G} = SVect(B)$ の双対空間となる．

$$\mathcal{G}^* \simeq \nabla \times \mathcal{G}. \tag{38}$$

$\mathcal{G}^* \simeq \nabla \times \mathcal{G}$ 上のハミルトニアンを

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(\,\omega\,, BS(\omega)\,)$$

として、$\frac{\delta H}{\delta \omega} = BS(\omega)$ だから、ハミルトンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}F(\omega) = \{H, F\}(\omega) = -(\omega\,, [\mathbf{v}, \frac{\delta F}{\delta \omega}]\,), \qquad \mathbf{v} = BS\omega.$$

$\mathbf{v} = BS\omega$ による Lie 微分を $L_{\mathbf{v}}$ として $-[\mathbf{v}, \frac{\delta F}{\delta \omega}] = L_{\mathbf{v}} \frac{\delta F}{\delta \omega}$ だから

$$\{H, F\}(\omega) = -\int_B \omega \cdot L_{\mathbf{v}} \frac{\delta F}{\delta \omega}\; d^3x = \int_B L_{\mathbf{v}}\omega \cdot \frac{\delta F}{\delta \omega}\; d^3x, \qquad \forall F.$$

ゆえに

$$\dot{\omega} = L_{\mathbf{v}}\omega, \qquad \omega = \nabla \times \mathbf{v}. \tag{39}$$

この式は (36) の両辺に ∇ を施したものになる．実際、(36) は $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega + \nabla q$ と書き直せることに注意して

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \nabla \times \dot{\mathbf{v}} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \nabla \times \nabla q \\ &= (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\omega - (div\,\mathbf{v})\omega + (div\,\omega)\mathbf{v} \\ &= (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = L_{\mathbf{v}}\omega. \end{aligned}$$

(39) を Euler 方程式の vortex 表現 (vorticity の発展方程式) という．

式 (39) は 渦表示の Euler 方程式の解（流線）は $\mathcal{G}^*$ の coadjoint orbit 上にあることを示している．

Lord Kelvin's circulation theorem: 渦は流線に沿って移動する．

velocity vector field $\mathbf{v}$ の vorticity vector field $\omega_{\mathbf{v}} = \nabla \times \mathbf{v}$ を任意の volume preserving diffeomorphism で移動しても、この diffeomorphism で $\mathbf{v}$ を移動した velocity vector field の vorticity になってはいないが、この移動が Euler 方程式の flow による diffcomorphism のときには、おなじ velocity vector field の vorticity になっている．

4.2 $\mathcal{G}^*$ での表現

リー環 $\mathcal{G} = SVect(B)$ の双対 (ベクトル) 空間は（vorticity vector fields の空間 $\nabla \times \mathcal{G}$ と別に）

$$\mathcal{G}^* = \Omega^1(B)/d\Omega^0(B) \tag{40}$$

で与えられる:

$$(\,[\nu]\,,\mathbf{v}\,) = \int_B \nu(\mathbf{v})\,d^3x, \qquad \nu \in \Omega^1(B),\ \mathbf{v} \in Vect(B). \tag{41}$$

Arnold により導入された inertia operator

$$A : \mathcal{G} \ni \mathbf{v} \longrightarrow \nu = A\mathbf{v} \in \mathcal{G}^* \tag{42}$$

は

$$(\,A\mathbf{v},\mathbf{w}\,) = \int_B \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{w}(x)\,d^3x, \qquad \mathbf{w},\,\mathbf{v} \in Vect(B). \tag{43}$$

で定義され, $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}^*$ の線形同型 を与える : $\mathbf{v} = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \longleftrightarrow \nu = \sum_j v_j\,dx_j$.

inertia operator A により $\mathcal{G}$ 上の Euler 方程式 (36) は $\mathcal{G}^*$ 上の方程式

$$\dot{\nu} = -L_{A^{-1}\nu}\,\nu - df \quad \exists(\forall) f \in \Omega^0(B). \tag{44}$$

に移される．[A-K. IV 章 1.D]　　ここに $L_{\mathbf{v}}$ は $\mathbf{v}$ による Lie 微分．

(44) はまた $\mathcal{G}^* = \Omega^1(B)/d\Omega^0(B)$ 上のハミルトニアン $H(\nu) = \frac{1}{2}(\,\nu\,,\,A^{-1}\nu)$ に対するハミルトンの運動方程式から導かれる．実際、$\frac{\delta H}{\delta \nu} = A^{-1}\nu$ より,

$$\frac{d}{dt}F(\nu(t)) = \{H,F\}(\nu(t)) = -(\nu\,,[A^{-1}\nu,\,\frac{\delta F}{\delta \nu}]\,) = (\,-\nu,\,ad_{A^{-1}\nu}\frac{\delta F}{\delta \nu}\,),$$

すなわち

$$\dot{\nu} = -ad^*_{A^{-1}\nu}\nu\,. \tag{45}$$

流体の観測 ($SDiff(B)$ の $Vect(B)$ への作用) において最も基本的なことは, $SDiff(B)$ の右作用によりベクトル場 $\dot{g} \in Vect(B)$ が不変なことである. したがって Ad_g は左作用 g_* (座標変換) として作用して、

$$Ad_g\,\mathbf{v} = g_*\,\mathbf{v}, \tag{46}$$

これより

$$Ad^*_g\,\nu = g^*\,\nu, \qquad ad^*_{\mathbf{v}}\nu = L_{\mathbf{v}}\nu\,, \qquad \mathrm{mod}\ d\Omega^0(B) \tag{47}$$

がしたがう. これを (45) に代入して

$$\dot{\nu} = -L_{A^{-1}\nu}\,\nu \quad \mathrm{mod}\ d\Omega^0(B). \tag{48}$$

すなわち (44) が示せた.

4.3

$B \subset \mathrm{R}^3$ は単連結とすると

$$\Omega^1(B)/d\Omega^0(B) \xrightarrow{d\simeq} Z^2(B,\partial B) = \{\beta \in \Omega^2(B);\ d\beta = 0, \quad \beta|\partial B = 0\}$$

これまで登場した空間の関係は次のようになる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} = SVect(B) & \xrightarrow{A\simeq} & \Omega^1(B)/d\Omega^0(B) \simeq \mathcal{G}^* \\ \nabla\times \downarrow \simeq \uparrow BS & & d \downarrow \simeq \uparrow d^*G \\ \mathcal{G}^* = \nabla \times SVect(B) & \xrightarrow{i.vol.\simeq} & Z^2(B,\partial B) \end{array} \tag{49}$$

ここに Green 関数 G は, $\nu \in Z^2(B,\partial B)$ に対して、$\Delta\beta = \nu$ の解 $\beta = G\nu \in Z^2(B,\partial B)$ を与える.

$$\begin{aligned} Svect(B) \ni \mathbf{v} &\longrightarrow \mathbf{v}^\flat = A\mathbf{v} \in \Omega^1(B)/d\Omega^0(B) \\ \nabla \times SVect(B) \ni \nabla \times \mathbf{v} = \omega &\longrightarrow d\mathbf{v}^\flat = \omega^\flat = i_\omega vol \in Z^2(B,\partial B), \\ SVect(B) \ni \mathbf{v} &\longrightarrow i_{\mathbf{v}} vol \in Z^2(B,\partial B), \end{aligned}$$

なる関係式があった.

$Z^2(B,\partial B)$ を双一次形式

$$((\beta,\,\mathbf{v})) = \int_B (d^*G\beta\,,\,\mathbf{v})\,d^3x,$$

により $\mathcal{G}$ の双対と見る. $\mathcal{G}^* \simeq Z^2(B, \partial B)$ として. Poisson 構造を考えると

$$\{F,G\} = -((\beta, [\frac{\delta F}{\delta \beta}, \frac{\delta G}{\delta \beta}])), \tag{50}$$

ここに $\frac{\delta F}{\delta \beta} \in \mathcal{G}$ は

$$DF(\beta)\delta\beta = ((\delta\beta, \frac{\delta F}{\delta \beta})) \tag{51}$$

で定義される. ハミルトニアン

$$H(\beta) = \frac{1}{2}\int_B \beta \wedge d^* G\beta$$

に対する $\mathbf{v} = \frac{\delta H}{\delta \beta}$ を求めよう。$DH(\beta)\gamma = \int_B \gamma \wedge d^* G\beta$ である. $DH(\beta)\gamma = ((\gamma, \mathbf{v}))$, $\forall\gamma \in Z^2(B, \partial B)$, だから $\mathbf{v}^\flat = d^* G\beta, \mod d\Omega^0(B)$. ゆえに $\omega^\flat = d\mathbf{v}^\flat = \beta$. すなわち $\mathbf{v} = \frac{\delta H}{\delta \beta}$ は β を vorticity form とする velocity field である. ゆえに

$$\dot{F} = \{F,H\} = -((\beta, [\frac{\delta F}{\delta \beta}, \mathbf{v}])) = -((\beta, L_{\mathbf{v}}\frac{\delta F}{\delta \beta})) = ((L_{\mathbf{v}}\beta, \frac{\delta F}{\delta \beta})) = DF(\beta)L_{\mathbf{v}}\beta.$$

こうして Euler 方程式の vorticity 表現 (あるいは vorticity の発展方程式) を微分形式で表した方程式が得られた:

$$\dot{\omega} = L_{\mathbf{v}}\omega, \quad d\mathbf{v}^\flat = \omega. \tag{52}$$

これは (39) を微分形式になおしたものであり、(44) の d の両辺の外微分をとった (vortex 形式になおした) ものである.

4.4 Clebsch parametrization

$F = C^\infty(\mathrm{R}^3)$, $\mathcal{R}_c$ = compact support Radon measure. $Z = F \times \mathcal{R}_c$ は次の symplectic 形式

$$\sigma((\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)) = \int_B \lambda_1\mu_2 - \int_B \lambda_2\mu_1,$$

により symplctic vector space となる. $F \times \mathcal{R}_c$ 上の Functional $H \in C(Z)$ の Frechet 微分 $\frac{\delta H}{\delta \lambda} \in \mathcal{R}_c$ を

$$D_1 H(\lambda, \mu)\xi \equiv \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{H(\lambda + \epsilon\xi, \mu) - F(\lambda, \mu)}{\epsilon} = \int_{\mathrm{R}^3} \xi \frac{\delta H}{\delta \lambda}$$

で定義, おなじく $\frac{\delta H}{\delta \mu} \in F$ を定義すると、ハミルトンベクトル場は $X_H = \left(\frac{\delta H}{\delta \mu}, -\frac{\delta H}{\delta \lambda}\right)$ となる.

$SDiff(B)$ の Z への作用を

$$g\cdot(\lambda,\mu)(x)=(\,\lambda(g^{-1}x),\mu(x)\,)$$

で定義する.
この作用の moment map

$$J:\,Z\longrightarrow\mathcal{G}^*=\Omega^1(B)/d\Omega^0(B)$$

は

$$J:\,(\lambda,\mu)\longrightarrow\lambda\,d\mu\in\Omega^1(B)/d\Omega^0(B). \tag{53}$$

証明. $\mathbf{v}\in\mathcal{G}=SVect(B)$ の F への infinitesimal action による基本ベクトル場は Lie 微分 $-L_{\mathbf{v}}\lambda$ だから moment map の定義式より

$$<\mathbf{v}\,,\,J(\lambda,\mu)>=\int_B(-L_{\mathbf{v}}\lambda)(x)\mu(x)d\,vol(x)=\int_B\lambda(x)(L_{\mathbf{v}}\mu)(x)d\,vol(x).$$

$L_{\mathbf{v}}\mu=(d\mu)\mathbf{v}$ だから $<\mathbf{v}\,,\,J(\lambda,\mu)>=\int_B\lambda(x)d\mu(\mathbf{v})(x)\,d\,vol(x)$. すなわち $J(\lambda,\mu)=\lambda d\mu \mod d\Omega^0(B)$.
$\mathcal{G}^*\simeq Z^2(B,\partial B)$ で書くなら $J(\lambda,\mu)=d\lambda\wedge d\mu$.
こうして

$$(F\times\mathcal{R}_c,\sigma)\ni(\lambda,\mu)\longrightarrow(Z^2(B,\partial B),\,\{\cdot,\cdot\})$$

は symplectic 多様体 $(F\times\mathcal{R}_c,\sigma)$ から Poisson 多様体 $(\mathcal{G}^*,\,\{\cdot,\cdot\})$ への Poisson map となる。　すなわち (λ,μ) は Clebsch parametrization.
この Clebsch parametrization にともなうゲージ変換群は $(Z=F\times\mathcal{R}_c,\sigma)$ の symplectic 変換群だから $Sp(2,\mathrm{R})$ である。([M-W] p.313) を見よ.

4.5 Helicity

オイラー方程式の解となるベクトル場 $\mathbf{v}$ に対して $\omega=\nabla\times\mathbf{v}$ を vorticity (渦度) という。
渦度 $\omega=\nabla\times\mathbf{v}$ に対して **Helicity** を

$$H(\omega)=\int_B(\mathbf{v}\cdot\omega)\,d^3x$$

と定義する。Hlicity は vorticity ω により定まり、ω を表す $\mathbf{v}+\nabla f\in Vect_{\mathrm{div},\partial}(B)$ の取り方に依存しない;

$$\int_B\nabla f\cdot\omega\,d^3x=0.$$

$H(\omega)$ はベクトル場の位相不変量である。
inertia operator A で $\mathcal{G}^*$ に移すと $v^\flat=A\mathbf{v}\in\mathcal{G}^*$, $\omega^\flat=dv^\flat$ として、

$$H(\omega)=\int_B v^\flat\,dv^\flat=\int_B v^\flat\,\omega^\flat \tag{54}$$

である。

Maxwell 方程式に対する Helicity(磁束の Helicity) は, 式 (54) に対応して

$$H(B) = \int_M A \wedge dA = \int_M A\,B, \qquad B = F_A = dA$$

になるであろう。 実際 $d(A + d\phi) = dA$, $dB = 0$ より $H(B)$ は $B = dA$ となる $A \in \mathcal{A}$ に依存しない。これは $U(1)-$ ゲージに対する Chern-Simons 形式である。

同じように考えて、Yang-Mills 方程式 (9) (10) に対する**磁束の Helicity** を Chern-Simons 形式

$$H(B) = \int_M Tr\left(AdA + \frac{1}{3}A^3\right) = \int_M Tr\left(AB - \frac{2}{3}A^3\right) \tag{55}$$

で定義する。 これはゲージ変換群 $\mathcal{G}$ で不変であるから、$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の関数として定義される。 すなわち vorticity 表示にともなう不変量であると思える。

一方 **電束の Helicity** を

$$H(E) = \int_M Tr(E \wedge d_A E) \tag{56}$$

で定義する。$E = -p$ は $g \in \mathcal{G}$ により $p \longrightarrow g^{-1}pg$ と変換した (2,3 節)。$H(E)$ はゲージ変換で不変であるから、orbit space $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上に定義され、同じく vorticity 表示にともなう量である。

[試み] 流体の記述 $SDiff(B)$ と Maxwell $\Omega^1(B)$ の semi direct product により電磁流体方程式のハミルトン形式が議論される. この論説で述べた流体の記述 $SDiff(B)$ と YM 方程式 の合成・混合積により Jackiw のいう非アーベル流体方程式が記述できるであろう。

[M-W]. Marsden-Weinstein: Coadjoint orbits, vortices and Clebsch variables for incompressible fluids, Physica 7D(1983),305-323.

[A-K]. Arnold-Khesin: Topological methods in hydrodynamics, App. Math. Ser.125, Springer.

[J], R. Jackiw: Lectures in fluid dynamics, A particle theorists view of supersymmetric, non-abelian, non-commutative fluid mechanics and d-branes. CRM Ser in Math. Phys. Springer